## Тема 1.2. Методы решения нелинейных уравнений

**1.**[**2.1. Постановка задачи**](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355351#_Toc57355351)

**1.**[**2.2. Отделение корней**](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355352#_Toc57355352)

1.[2.2.1. Графическое отделение корней](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355353#_Toc57355353)

1.[2.2.2. Аналитическое отделение корней](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355354#_Toc57355354)

**1.**[**2.3. Уточнение корней**](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355355#_Toc57355355)

1.[2.3.1. Метод половинного деления](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355356#_Toc57355356)

1.[2.3.2. Метод итерации](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355357#_Toc57355357)

1.[2.3.3. Метод Ньютона (метод касательных)](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355358#_Toc57355358)

1.[2.3.4. Метод хорд](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355359#_Toc57355359)

1.[2.3.5. Сравнение методов решения нелинейных уравнений](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355360#_Toc57355360)

**1.2.4. Тестовые задания по теме «Методы решения нелинейных уравнений»**

### **1.2.1. Постановка задачи**

Одной из важнейших и наиболее распространенных задач математического анализа является задача определения корней уравнения с одним неизвестным, которое в общем виде можно представить как f(x) = 0. В зависимости от вида функции f(x)различают алгебраические и трансцендентные уравнения. **Алгебраическими уравнениями**называются уравнения, в которых значение функции f(x) представляет собой полином n-й степени:

f(x) = Р(х) = an xn + a2 x2 + …+ a1 x + a0  = 0. **(**1.2.1-1)

Всякое неалгебраическое уравнение называется **трансцендентным уравнением**. Функция f(x) в таких уравнениях представляет собой хотя бы одну из следующих функций: показательную, логарифмическую, тригонометрическую или обратную тригонометрическую.

Решением уравнения f(x)=0называется совокупность корней, то есть такие значения независимой переменной , при которых уравнение обращается в тождество . Однако, точные значения корней могут быть найдены аналитически только для некоторых типов уравнений. В частности, формулы, выражающие решение алгебраического уравнения, могут быть получены лишь для уравнений не выше четвертой степени. Еще меньше возможностей при получении точного решения трансцендентных уравнений. Следует отметить, что задача нахождения точных значений корней не всегда корректна. Так, если коэффициенты уравнения являются приближенными числами, точность вычисленных значений корней заведомо не может превышать точности исходных данных. Эти обстоятельства заставляют рассматривать возможность отыскания корней уравнения с ограниченной точностью (приближенных корней).

Задача нахождения корня уравнения с заданной точностью **** (>0)считается решенной, если вычислено приближенное значение , которое отличается от точного значения корня не более чем на значение ε

**** (1.2.1-2)

Процесс нахождения приближенного корня уравнения состоит из двух этапов:

1. **отделение корней (локализация корней);**
2. **итерационное уточнение корней.**

На этапе отделения корней решается задача отыскания возможно более узких отрезков , в которых содержится один и только один корень уравнения.

Этап уточнения корня имеет своей целью вычисление приближенного значения корня с заданной точностью. При этом применяются итерационные методы вычисления последовательных приближений к корню: x0, x1, ..., xn, …, в которых каждое последующее приближение xn+1вычисляется на основании предыдущего xn. Каждый шаг называется итерацией. Если последовательность x0, x1, ..., xn, …при n → ∞ имеет предел, равный значению корня , то говорят, что итерационный процесс сходится.

Существуют различные способы отделения и уточнения корней, которые мы рассмотрим ниже.

### **1.2.2. Отделение корней**

Корень  уравнения f(x)=0считается отделенным (локализованным) на отрезке , если на этом отрезке данное уравнение не имеет других корней. Чтобы отделить корни уравнения, необходимо разбить область допустимых значений функции f(x) на достаточно узкие отрезки, в каждом их которых содержится только один корень. Существуют **графический** и **аналитический** способы отделения корней.

#### **1.2.2.1. Графическое отделение корней**

Графическое отделение корней основано на графическом способе решения уравнений – отыскании точек, в которых функция f(x)пересекает ось 0Х.

**Пример 1.2.2-1. Отделить корни уравнения ln (x-1)2 – 0.5 = 0.**

На рис. 1.2.2-1 изображен график функции y = ln (x-1)2 – 0.5, из которого следует, что уравнение имеет два действительных корня  [-1;0] и  [2;3].

|  |
| --- |
|  |

Рис.1.2.2-1

В некоторых случаях удобно вначале преобразовать функцию f(x) к виду f(x)=g1(x**)** - g2(x), из которого, при условии f(x)=0, следует, что g1(x)=g2(x). При построении графиков y1=g1(x**)** и y2=g2(x)находят отрезки, содержащие точки пересечения этих графиков.

**Пример 1.2.2-2.** **Отделить корни уравнения сos(x) – x + 1 = 0.**

Приведем исходное уравнение к виду сos(x)= x – 1. Построив графики функций y1 = сos(x) и y2 = х – 1 (рис. 1.2.2), выделим отрезок, содержащий корень **** [1;2].

|  |
| --- |
| Рис-6-02-02.png |

Рис. 1.2.2-2

#### **1.2.2.2. Аналитическое отделение корней**

**Аналитическое отделение** корней основано на следующей теореме.

*Если функция* f(x**)** *непрерывна и монотонна на отрезке* [α;β] *и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то на отрезке* [α;β] *содержится один корень уравнения* f(x)=0*.*

Действительно, если условия теоремы выполнены, как это имеет место на отрезке [a;b] (рис. 1.2.2-3), то есть f(a)∙f(b)<0 и f'(x)>0 для x∈ [a;b], то график функции пересекает ось **0Х** только один раз и, следовательно, на отрезке [a;b] имеется один корень **** уравнения f(x) = 0**.**

Аналогично можно доказать единственность корня на отрезке [c;d], на[d;e]и т.д

|  |
| --- |
| Рис-6-02-03.png |

Рис. 1.2.2-3

Таким образом, для отделения корней нелинейного уравнения необходимо найти отрезки, в пределах которых функция монотонна и изменяет свой знак. Принимая во внимание, что непрерывная функция монотонна в интервалах между критическими точками, при аналитическом отделении корней уравнения можно рекомендовать следующий порядок действий:

1. установить область определения функции;
2. определить критические точки функции, решив уравнение f′(x)=0;
3. составить таблицу знаков функции f(x) в критических точках и на границах области определения;
4. определить интервалы, на концах которых функция принимает значения разных знаков.

**Пример 1.2.2-3. Отделить корни уравнения x - ln(x+2) = 0.**

Область допустимых значений функции f(x) = x - ln(x+2) лежит в интервале (-2; ∞), найденных из условия x+2>0. Приравняв производную f′(x)=1-1/(x+2) к нулю, найдем критическую точку хk= -1. Эти данные сведены в табл. 1.2.2-1 и табл. 1.2.2-2 знаков функции f(x).

Таблица 1.2.2-1 Таблица 1.2.2-.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **x→-2** | **-1** | **x→∞** |  | **x** | **-1.9** | **-1.1** | **-0.9** | **2.0** |
| Sign(f(x)) | + | - | + |  | Sign(f(x)) | + | - | - | + |

Уравнение x - ln(x+2) = 0 имеет два корня **** (-2;-1] и ****[-1; ∞) . Проверка знака функции внутри каждого из полученных полуинтервалов (табл.1.2.2) позволяет отделить корни уравнения на достаточно узких отрезках [-1.9;-1.1] и  ****[-0.9;2.0].

### **1.2.3. Уточнение корней**

Задача уточнения корня уравнения  с точностью ****, отделенного на отрезке [a;b], состоит в нахождении такого приближенного значения корня , для которого справедливо неравенство **.** Если уравнение имеет не один, а несколько корней, то этап уточнения проводится для каждого отделенного корня.

#### **1.2.3.1. Метод половинного деления**

Пусть корень уравнения f(x)=0 отделен на отрезке ****[a;b], то есть на этом отрезке имеется единственный корень, а функция на данном отрезке непрерывна.

Метод половинного деления позволяет получить последовательность вложенных друг в друга отрезков [a1;b1], [a2;b2], …,[ai;bi],…, [an;bn], таких что f(ai).f(bi) < **0**, где i=1,2,…,n, а длина каждого последующего отрезка вдвое меньше длины предыдущего:

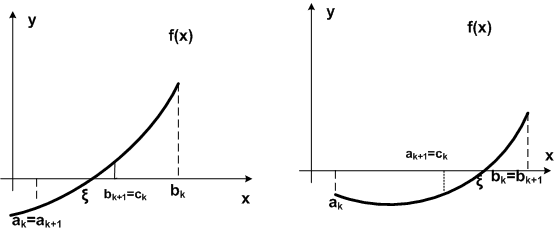


Рис.1.2.3-1

Последовательное сужение отрезка вокруг неизвестного значения корня обеспечивает выполнение на некотором шаге **n** неравенства |bn - an| < ε. Поскольку при этом для любого х∈[an;bn] будет выполняться неравенство | - х| < ****, то с точностью **** любое

 может быть принято за приближенное значение корня, например его середину отрезка 

В методе половинного деления от итерации к итерации происходит последовательное уменьшение длины первоначального отрезка [a0;b0]в два раза (рис. 1.2.3-1). Поэтому на n-м шаге справедлива следующая оценка погрешности результата:

** (**1.2.3-1**)**

где - точное значение корня, хn∈ [an;bn] – приближенное значение корня на n-м шаге.

Сравнивая полученную оценку погрешности с заданной точностью ****, можно оценить требуемое число шагов:

 (1.2.3-2)

Из формулы видно, что уменьшение величины **ε** (повышение точности) приводит к значительному увеличению объема вычислений, поэтому на практике метод половинного деления применяют для сравнительно грубого нахождения корня, а его дальнейшее уточнение производят с помощью других, более эффективных методов.

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.2.3-2. Схема алгоритма метода половинного деления

Схема алгоритма метода половинного деления приведена на рис. 1.2.3-2. В приведенном алгоритме предполагается, что левая часть уравнения f(x)оформляется в виде программного модуля.

**Пример 1.2.3-1. Уточнить корень уравнения x3+x-1=0 с точностью =0.1, который локализован на отрезке [0;1].**

Результаты удобно представить с помощью таблицы 1.2.3-3.

Таблица 1.2.3-3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **a** | **b** | **f(a)** | **f(b)** | **(a+b)/2** | **f((a+b)/2)** | **a k** | **b k** |
| **1** | 0 | 1 | -1 | 1 | 0.5 | -0.375 | 0.5 | 1 |
| **2** | 0.5 | 1 | -0.375 | 1 | 0.75 | 0.172 | 0.5 | 0.75 |
| **3** | 0.5 | 0.75 | -0.375 | 0.172 | 0.625 | -0.131 | 0.625 | 0.75 |
| **4** | 0.625 | 0.75 | -0.131 | 0.172 | 0.688 | 0.0136 | 0.625 | 0.688 |

После четвертой итерации длина отрезка |b4-a4| = |0.688-0.625| = 0.063 стала меньше величины **ε**, следовательно, за приближенное значение корня можно принять значение середины данного отрезка: x = (a4+b4)/2 = 0.656**.**

Значение функции f(x) в точке x = 0.656 равно f(0.656) = -0.062**.**

#### **1.2.3.2. Метод итерации**

Метод итераций предполагает замену уравнения f(x)=0 равносильным уравнением x=ϕ(x). Если корень уравнения отделен на отрезке [a;b], то исходя из начального приближения x0∈[a;b**],** можно получить последовательность приближений к корню

x1 = ϕ(x0), x2 = ϕ(x1), …,**, (**1.2.3-3**)**

где функция ϕ(x) называется итерирующей функцией.

Условие сходимости метода простой итерации определяется следующей теоремой.

*Пусть корень* х\* *уравнения* x=ϕ(x) *отделен на отрезке* [a;b]*и построена последовательность приближений по правилу* xn=ϕ(xn-1)***.*** *Тогда, если все члены последовательности* xn=ϕ(xn-1) ∈ [a;b] *и существует такое* q (0<q<1)*, что для всех* х ∈ [a; b]*выполняется* |ϕ’(x)| = q<1*, то эта последовательность является сходящейся и пределом последовательности является значение корня* x\**, т.е. процесс итерации сходится к корню уравнения независимо от начального приближения.*

Таким образом, если выполняется условие сходимости метода итераций, то последовательность x0, x1, x2, …, xn,…, полученная с помощью формулы xn+1 = ϕ(xn**),** сходится к точному значению корня:

если

Условие ϕ(x)∈[a;b] при x∈[a;b] означает, что все приближения x1, x2, …, xn,…, полученные по итерационной формуле, должны принадлежать отрезку [a;b], на котором отделен корень.

Для оценки погрешности метода итерации справедливо условие

 (1.2.3-4)

За число **q** можно принимать наибольшее значение |ϕ'(x)|**,** а процесс итераций следует продолжать до тех пор, пока не выполнится неравенство

 (1.2.3-5)

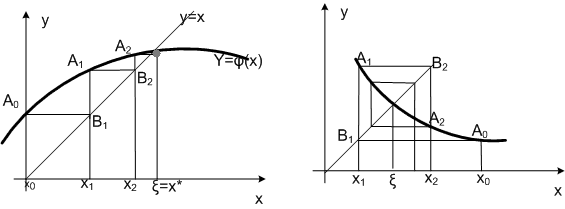
На практике часто используется упрощенная формула оценки погрешности. Например, если 0<q≤½ то

|xn-1 - xn| ≤ .

Использование итерационной формулы xn+1= ϕ(xn) позволяет получить значение корня уравнения f(x)=0 с любой степенью точности**.**

**Геометрическая иллюстрация метода итераций**. Построим на плоскости X0Y графики функций y=x и y=ϕ(x**).** Корень уравнения х=ϕ(x) является абсциссой точки пересечения графиков функции y = ϕ(x**)** и прямой y=x. Возьмем некоторое начальное приближение x0 ∈ [a;b]. На кривой y = ϕ(x) ему соответствует точка А0 = ϕ(x0). Чтобы найти очередное приближение, проведем через точку А0 прямую горизонтальную линию до пересечения с прямой y = x (точкаВ1) и опустим перпендикуляр до пересечения с кривой (точкаА1), то есть х1=ϕ(x0)**.** Продолжив построение аналогичным образом, имеем ломаную линию А0, В1, А1, В2, А2…, для которой общие абсциссы точек представляют собой последовательное приближение х1, х2, …, хn («лестницу») к корню х\*. Из рис. 1.2.3-3а видно, что процесс сходится к корню уравнения.

Рассмотрим теперь другой вид кривой y = ϕ(x) (рис. 1.2.6b). В данном случае ломаная линия А0, В1, А1, В2, А2…имеет вид “спирали”. Однако, и в этом случае наблюдается сходимость.

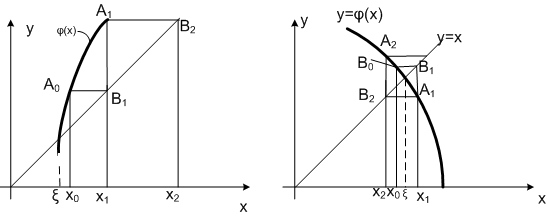


a) b)

Рис. 1.2.3-3

Нетрудно видеть, что в первом случае для производной выполняется условие 0< ϕ’(x)< 1, а во втором случае производная ϕ’(x)<0иϕ’(x)>-1. Таким образом, очевидно, что если |ϕ’(x)|<1, то процесс итераций сходится к корню.

Теперь рассмотрим случаи, когда |ϕ’(x) |> 1. На рис. 1.2.3-4а показан случай, когда ϕ’(x)>1, а на рис. 1.2.3-4b – когда ϕ’(x) < -1. В обоих случаях процесс итерации расходится, то есть, полученное на очередной итерации значение х все дальше удаляется от истинного значения корня.



1. b)

Рис. 1.2.3-4

**Способы улучшения сходимости процесса итераций**. Рассмотрим два варианта представления функции ϕ(x) при переходе от уравнения f(x)кx=ϕ(x).

1. Пусть функция ϕ(x) дифференцируема и монотонна в окрестностях корня и существует числоk ≤ |ϕ‘(x)|, где k ≥ 1 (т.е. процесс расходится). Заменим уравнение х=ϕ(x) эквивалентным ему уравнением х=Ψ(х**)**, где **Ψ(х) = 1/ϕ(x)** (перейдем к обратной функции). Тогда

 а значит q=1/k < 1 и процесс будет сходиться.

1. Представим функцию ϕ(x) как ϕ(x) = х - λf(x), где λ - коэффициент**,** не равный

нулю. Для того чтобы процесс сходился, необходимо, чтобы   
0<|ϕ′(x)| = |1 - λf′(x)| < 1. Возьмем λ= 2/(m1+M1**),** где m1 и M1 – минимальное и максимальное значения f’(x) (m1=min|f’(x)|, M1=max|f’(x)|) для х∈[a;b], т.е. 0≤ m1 ≤ f′(x) ≤ M1≤1. Тогда



и процесс будет сходящимся, рекуррентная формула имеет вид



Если f′(x) < 0, то в рекуррентной формуле f(x) следует умножить на -**1**.

Параметр λ может быть также определен по правилу:

Если , то , а если , то , где .

Схема алгоритма метода итерации приведена на рис. 1.2.3-5.

Исходное уравнение f(x)=0преобразовано к виду, удобному для итераций:  Левая часть исходного уравнения f(x) и итерирующая функция fi(x) в алгоритме оформлены в виде отдельных программных модулей.

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.2.3-5. Схема алгоритма метода итерации

**Пример 1.2.3-2. Уточнить корень уравнения 5x – 8∙ln(x) – 8 =0 с точностью 0.1, который локализован на отрезке [3;4].**

Приведем уравнение к виду, удобному для итераций:

****

****



Следовательно, за приближенное значение корня уравнения принимаем значение x3=3.6892, обеспечивающее требуемую точность вычислений. В этой точке f(x3)=0.0027.

#### **1.2.3.3. Метод Ньютона (метод касательных)**

Пусть корень уравнения f(x)=0 отделен на отрезке [a;b], причем первая и вторая производные f’(x) и **f''(x)** непрерывны и знакопостоянны при х∈ [a;b**].**

Пусть на некотором шаге уточнения корня получено (выбрано) очередное приближение к корню хn**.** Тогда предположим, что следующее приближение, полученное с помощью поправки hn**,** приводит к точному значению корня

ξ = хn + hn.  (1.2.3-6)

Считая **hn** малой величиной, представим f(хn+ hn) в виде ряда Тейлора, ограничиваясь линейными слагаемыми

f(хn + hn) ≈ f(хn) + hnf’(хn). (1.2.3-7)

Учитывая, что f(ξ) = f(хn + hn) = 0, получим f(хn) + hnf ’(хn) ≈ 0.

Отсюда hn ≈ - f(хn)/ f’(хn). Подставим значение **hn**  в (1.2.3-6) и вместо точного значения корня **ξ** получим очередное приближение

 (1.2.3-8)

Формула (1.2.3-8) позволяет получить последовательность приближений х1,х2, х3…, которая при определенных условиях сходится к точному значению корня **ξ,** то есть 

**Геометрическая интерпретация метода Ньютона** состоит в следующем   
(рис.1.2.3-6). Примем за начальное приближение x0 правый конец отрезка b и в соответствующей точке В0 на графике функции y = f(x) построим касательную. Точка пересечения касательной с осью абсцисс принимается за новое более точное приближение х1. Многократное повторение этой процедуры позволяет получить последовательность приближений х0, х1, х2 **, . .** ., которая стремится к точному значению корня **ξ.**

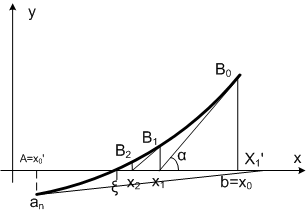
****

Рис. 1.2.3-6

Расчетная формула метода Ньютона (1.2.3-8) может быть получена из геометрического построения. Так в прямоугольном треугольнике х0В0х1катет   
х0х1 = х0В0/tgα. Учитывая, что точка В0находится на графике функции **f(x),** а гипотенуза образована касательной к графику f(x) в точке В0, получим

 (1.2.3-9)

 (1.2.3-10)

Эта формула совпадает с (1.2.3-8) для n-го приближения.

Из рис.1.2.3-6 видно, что выбор в качестве начального приближения точки а может привести к тому, что следующее приближение х1окажется вне отрезка [a;b], на котором отделен корень **ξ**. В этом случае сходимость процесса не гарантирована. В общем случае выбор начального приближения производится в соответствии со следующим правилом: за начальное приближение следует принять такую точку х0∈[a;b], в которой f(х0)⋅f’’(х0)>0, то есть знаки функции и ее второй производной совпадают.

Условия сходимости метода Ньютона сформулированы в следующей теореме.

*Если корень уравнения отделен на отрезке* [a;b]*, причем* f’(х0)и f’’(х) *отличны от нуля и сохраняют свои знаки при* х∈[a;b**]***, то, если выбрать в качестве начального приближения такую точку* х0∈[a;b]*, что* f(х0).f′′(х0)>0*, то корень уравнения* f(x)=0 *может быть вычислен с любой степенью точности.*

Оценка погрешности метода Ньютона определяется следующим выражением:

 (1.2.3-11)

где  -- наименьшее значение  при 

 -- наибольшее значение  при 

Процесс вычислений прекращается, если ,

где  -- заданная точность.

Кроме того, условием достижения заданной точности при уточнении корня методом Ньютона могут служить следующие выражения:



(1.2.3-12)



Схема алгоритма метода Ньютона приведена на рис. 1.2.3-7.

Левая часть исходного уравнения f(x) и ее производная f’(x) в алгоритме оформлены в виде отдельных программных модулей.

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.2.3-7. Схема алгоритма метода Ньютона

**Пример 1.2.3-3.**  **Уточнить методом Ньютона корни уравнения x-ln(x+2) = 0 при условии, что корни этого уравнения отделены на отрезках ξ1∈[-1.9;-1.1] и ξ2∈ [-0.9;2].**

Первая производная f’(x) = 1 – 1/(x+2) сохраняет свой знак на каждом из отрезков:

f’(x)<0 при х∈ [-1.9; -1.1],

f’(x)>0 при х∈ [-0.9; 2].

Вторая производная f'(x) = 1/(x+2)2 > 0 при любых х.

Таким образом, условия сходимости выполняются. Поскольку f''(x)>0 на всей области допустимых значений, то для уточнения корня за начальное приближение **ξ1**выберем х0= -1,9 (так как f(-1,9)⋅f”(-1.9)>0). Получим последовательность приближений:



Продолжая вычисления, получим следующую последовательность первых четырех приближений: -1.9; –1.8552, -1.8421; -1.8414**.** Значение функции f(x) в точке x = -1.8414 равно f(-1.8414) = -0.00003**.**

Для уточнения корня ξ2∈[-0.9;2] выберем в качестве начального приближения х0 = 2 (f(2)⋅f”(2)>0). Исходя из х0 = 2, получим последовательность приближений: 2.0; 1.1817; 1.1462; 1.1461. Значение функции f(x) в точке x = 1.1461 равно f(1.1461) = -0.00006.

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости, однако на каждом шаге он требует вычисления не только значения функции, но и ее производной.

#### **1.2.3.4. Метод хорд**

**Геометрическая интерпретация метода хорд** состоит в следующем   
(рис.1.2.3-8).

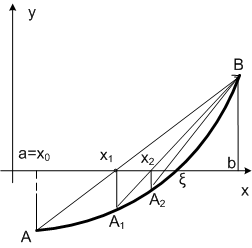


Рис.1.2.3-8

Проведем отрезок прямой через точки A и B. Очередное приближение x1 является абсциссой точки пересечения хорды с осью 0х. Построим уравнение отрезка прямой:



Положим y = 0 и найдем значение х = х1 (очередное приближение):



Повторим процесс вычислений для получения очередного приближения к корню - х2**:**



В нашем случае (рис.1.2.11)  и расчетная формула метода хорд будет иметь вид

 (1.2.3-13)

Эта формула справедлива, когда за неподвижную точку принимается точка b, а в качестве начального приближения выступает точка a.

Рассмотрим другой случай (рис. 1.2.3-9), когда .

|  |
| --- |
|  |

Рис.1.2.3-9

Уравнение прямой для этого случая имеет вид



Очередное приближение х1 при y = 0



Тогда рекуррентная формула метода хорд для этого случая имеет вид

 (1.2.3-14)

Следует отметить, что за неподвижную точку в методе хорд выбирают тот конец отрезка [a;b], для которого выполняется условие f (x)∙ f′′ (x)>0.

Таким образом, если за неподвижную точку приняли точку а**,** то в качестве начального приближения выступает х0 = b, и наоборот.

Достаточные условия, которые обеспечивают вычисление корня уравнения f(x)=0 по формуле хорд, будут теми же, что и для метода касательных (метод Ньютона), только вместо начального приближения выбирается неподвижная точка. Метод хорд является модификацией метода Ньютона. Разница состоит в том, что в качестве очередного приближения в методе Ньютона выступает точка пересечения касательной с осью 0Х, а в методе хорд – точка пересечения хорды с осью 0Х – приближения сходятся к корню с разных сторон.

Оценка погрешности метода хорд определяется выражением

 (1.2.3-15)

Условие окончания процесса итераций по методу хорд

 (1.2.3-16)

В случае, если M1<2m1, то для оценки погрешности метода может быть использована формула | xn - xn-1| ≤ **ε.**

**Пример 1.2.3-4. Уточнить корень уравнения ex – 3x = 0, отделенный на отрезке [0;1] с точностью 10-4.**

Проверим условие сходимости:



Следовательно, за неподвижную точку следует выбрать а=0, а в качестве начального приближения принять х0=1, поскольку f(0)=1>0 и f(0)\*f"(0)>0.

Результаты расчета, полученные с использованием формулы   
1.2.3-14, представлены в таблице 1.2.3-4.

Таблица 1.2.3-4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **i** | **x** | **f(x)** |
| **1** | 0.7812 | -0.1569 |
| **2** | 0.6733 | -0.0591 |
| **3** | 0.6356 | -0.0182 |
| **…** | ……….. | ……….. |
| **8** | 0.6191 | -4.147∙10-5 |

Требуемая точность достигается на 8-й итерации. Следовательно, за приближенное значение корня можно принять х = 0.6191.

Схема алгоритма метода хорд приведена на рис. 1.2.3-10.

Выбор неподвижной точки, определяющей вид расчетной формулы, производится путем сравнения одного из концов отрезка [a;b] с начальным приближением (x0=a)**.** В качестве неподвижного конца отрезка (точка с) выбирается тот, который не совпадает с начальным приближением.

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.2.3-10. Схема алгоритма метода хорд

#### **1.2.3.5. Сравнение методов решения нелинейных уравнений**

Метод **половинного деления** очень прост и имеет одно явное преимущество по сравнению со всеми рассмотренными выше методами – он всегда сходится. Однако, скорость сходимости очень мала, поэтому его часто используют для грубого уточнения корня.

Метод **касательных** (метод Ньютона) эффективен для решения уравнений, график которых в окрестности корня имеет большую крутизну. Метод обладает высокой скоростью сходимости, но его сходимость зависит от вида функции, поэтому рекомендуется отрезок, на котором отделяется корень, выбирать очень небольшой длины.

Метод **хорд,** являясь модификацией метода касательных, также обладает хорошей скоростью сходимости. При правильном выборе неподвижной точки последовательность приближений гарантированно сходится к корню уравнения.

Метод **простой итерации** дает возможность «угадывать» новые значения **х** на любом шаге. Следовательно, если процесс сходится медленно, можно вносить коррективы, учитывая предыдущие результаты. Метод прост и обладает хорошей сходимостью. Однако перед его использованием требуется преобразование исходного уравнения и проведение дополнительных вычислений.

Отметим, что на практике при решении нелинейных уравнений обычно используется комбинация нескольких методов.

### **1.2.4. Тестовые задания по теме «Методы решения нелинейных уравнений»**

1. **Нелинейное уравнение – это**
   * 1. алгебраическое или трансцендентное уравнение
     2. алгебраическое уравнение
     3. тригонометрическое уравнение
     4. трансцендентное уравнение
2. **Нахождение возможно более узкого отрезка, содержащего только один корень уравнения, называется**
   * 1. разделением корней
     2. отделением корней
     3. уточнением корней
     4. решением нелинейного уравнения
3. **На отрезке [a;b] имеется хотя бы один корень, если**
   * 1. 
     2. 
     3. 
     4. 
4. **Этапы решения нелинейного уравнения называются**
   * 1. отделение корней и уточнение отделенного корня
     2. графическое и аналитическое вычисления корня
     3. табличное отделение корня и аналитическое уточнение корня
     4. вычисления каждого из корней уравнения
5. **Начальное приближение к корню это**
   * 1. значение х, при котором уравнение обращается в тождество
     2. значение х, принадлежащее отрезку, содержащему корень
     3. значение х, являющееся одним из концов отрезка, содержащего корень
     4. значение х, обеспечивающее сходимость метода уточнения корня
6. **Чтобы выбрать x0в качестве начального приближения в методе Ньютона, необходимо, чтобы в этой точке** 
   * 1. функция и вторая производная имели одинаковые знаки
     2. функция и первая производная имели одинаковые знаки
     3. первая и вторая производная имели одинаковые знаки
     4. функция и первая производная имели разные знаки
7. **Метод решения нелинейного уравнения, в результате которого получается последовательность вложенных отрезков – это**
8. метод итерации
9. метод половинного деления
10. метод Ньютона – Рафсона
11. метод хорд
12. в списке нет правильного ответа
13. **Правилом выбора итерирующей функции при использовании метода итераций является**
14. 
15. 
16. 
17. 
18. **За начальное приближение в методе итерации принимают**
19. 
20. , если 
21. в списке нет правильного ответа
22. , если 
23. **Правилом выбора неподвижной точки при использовании метода хорд является**
24. 
25. 
26. 
27. в списке нет правильного ответа
28. **За начальное приближение в методе Ньютона выбирают конец отрезка, для которого**
29. 
30. 
31. 
32. в списке нет правильного ответа
33. **Метод Ньютона применять не рекомендуется, если**
34. - выпуклая
35.  - монотонная
36. - пологая
37. в списке нет правильного ответа
38. **Если на заданном отрезке имеется два корня, то о методе итераций можно сказать**
39. метод обеспечит сходимость к одному из корней
40. метод разойдется
41. в списке нет правильного ответа
42. сходимость метода не гарантирована
43. **В процессе решения уравнения методом простой итерации приближение к корню может осуществляться**
44. монотонно или колебательно
45. монотонно со стороны начального приближения
46. колебательно справа и слева от корня
47. в списке нет правильного ответа
48. **Метод решения нелинейного уравнения, обладающий свойством "самокоррекции"**
49. метод хорд
50. метод итераций
51. метод Ньютона-Рафсона
52. метод Вегстейна
53. **Корень уравнения  принадлежит отрезку**
54. 
55. 
56. 
57. 
58. **Корень уравнения  принадлежит отрезку**
59. 
60. 
61. 
62. 
63. **Корень уравнения  принадлежит отрезку**
64. 
65. 
66. 
67. 
68. **Корень уравнения  принадлежит отрезку**
69. 
70. 
71. 
72. 
73. **Корень уравнения  принадлежит отрезку**
74. 
75. 
76. 
77. 
78. **Начальным приближением к корню при решении уравнения   методом половинного деления служит**
79. 
80. 
81. 
82. 
83. **Начальным приближением к корню при решении уравнения  методом простой итерации служит**
84. любое значение 
85. 
86. 
87. 
88. **Начальным приближением к корню при решении уравнения  методом Ньютона служит**
89. 
90. 
91. 
92. любое значение 
93. **Начальным приближением к корню при решении уравнения   методом хорд служит**
94. 
95. 
96. 
97. любое значение 
98. **Неподвижной точкой при решении уравнения , если корень отделен на отрезке , служит**
99. 
100. 
101. 
102. 
103. **При решении уравнения   методом половинного деления с заданной точностью требуется выполнить**
104. 7 итераций
105. 6 итераций
106. 5 итераций
107. 4 итерации
108. **При решении уравнения   методом половинного деления погрешность результата после трех итераций равна**
109. 0.25
110. 0.125
111. 0.625
112. 0.01
113. **Первым приближением к корню при решении уравнения ** **методом Ньютона, если , является**
114. 
115. 
116. 
117. 
118. **Первым приближением к корню при решении уравнения   методом хорд, если , является**
119. 
120. 
121. 
122. 
123. **Первым приближением к корню при решении уравнения  методом итераций, если , является**
124. 
125. 
126. 
127. 